TITLE:

Sierpinski gasket格子上の長距離浸透モデルにおけるランダムウォークの混合時間と等周定数 (確率論シンポジウム)

AUTHOR(S):

三角, 淳

CITATION:

三角, 淳. Sierpinski gasket格子上の長距離浸透モデルにおけるランダムウォークの混合時間と等周定数 (確率論シンポジウム). 数理解析研究所講究録 2019, 2116: 33-38

ISSUE DATE:

2019-07

URL:

http://hdl.handle.net/2433/252090

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録 第2116巻 2019年 33-38

Sierpinski gasket 格子上の長距離浸透モデルにおけるランダムウォークの混合時間と等周定数

高知大学・自然科学系理工学部門　三角　淳
Jun Misumi
Natural Sciences Cluster, Science and Technology Unit,
Kochi University

本稿では、基本的なフラクタル格子の1つであるSierpinski gasket 格子上での長距離浸透モデルに対して、ランダムグラフ上のランダムウォークの混合時間の評価に関する論文 [6] の結果を紹介する。またその内容に関連して、対応するランダムグラフの等周定数について考察する。

1　問題設定

平面上の点 $\mathrm{O}=(0,0)$, $u_0=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $v_0=(1,0)$ に対して、三角形 $\mathrm{O}u_0v_0$ の3個の頂点と3本の辺からなるグラフを G_0 とする。さらに、$u_n=2^nu_0$, $v_n=2^nv_0$ とし、有限グラフの列 $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$G_{n+1}=G_n\cup(G_n+u_n)\cup(G_n+v_n)\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

によって定義する。$G=\cup_{n=0}^{\infty}G_n$ を Sierpinski gasket 格子 (pre-Sierpinski gasket) と呼ぶ。以下では G_n の頂点集合を V_n で表す。

n を固定し、有限グラフ G_n 上で長距離浸透モデルの問題を考える。すなわち、$p(1)=1$,

$$p(k)=1-\exp(-\beta k^{-s})\quad(k=2,3,4,\cdots)$$

（β, s は正の実数）として、各 $x,y\in V_n$ $(x\neq y)$ に対して独立に、確率 $p(|x-y|)$ で、2点 x,y がランダムな辺で結ばれるとする。（$|x-y|$ は、G_n 上における2点間の最短ステップ数。）V_n に属する頂点と、上記の規則によって作られるランダムな辺からなるランダムグラフを G'_n とおく。な

お、ここでは向き付けられた辺集合を考え、x, y が辺で結ばれているときには辺 (x, y) と 辺 (y, x) が存在しているとみなす。G'_n の向き付けられた辺集合を E'_n とおく。また、G_n 上の長距離浸透モデルに対する確率測度を $\mathbb{P}$ で表す。

2　ランダムウォークの混合時間

1 節で定義されたランダムグラフ G'_n の形状を固定するごとに、その上で、推移確率 $P(x, y) = P(X_{t+1} = y | X_t = x)$ が

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\deg(x)} & (x \neq y \text{ かつ } x, y \text{ が } G'_n \text{上の隣接点のとき}) \\ \frac{1}{2} & (x = y \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \qquad (x, y \in V_n)$$

（$\deg(x)$ は x から出ている辺の本数）で与えられる離散時間 lazy random walk $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ を考える。$\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ の t ステップ推移確率を $P^t(x, y) = P(X_t = y | X_0 = x)$、定常分布を $\pi = (\pi(x))_{x \in V_n}$ とする。（$\pi(x) = \deg(x)/|E'_n|$ と書ける。）$x \in V_n$, $t = 0, 1, 2, \cdots$ に対して変動距離

$$\Delta_x(t) = \frac{1}{2} \sum_{y \in V_n} |P^t(x, y) - \pi(y)|$$

を考えたとき、$\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ はエルゴード的より $\Delta_x(t)$ は $t \to \infty$ のとき 0 に収束している。$\tau_x(\varepsilon) = \min\{t \,|\, \text{任意の } t' \geq t \text{ に対して} \Delta_x(t') \leq \varepsilon\}$ と定め、$\tau(G'_n) = \max_{x \in V_n} \tau_x(1/4)$ を $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ の混合時間と呼ぶ。なお、以下では $d = \log 3 / \log 2$ とする。

定理 2.1 ([6])　$d < s < 2d$ のとき、正の定数 c_1, c_2 が存在して次が成り立つ。

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(c_1 2^{(s-d)n} \leq \tau(G'_n) \leq n^{c_2} 2^{(s-d)n}\right) = 1.$$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の長距離浸透モデルに対しては、$\tau(G'_n)$ に相当する量が $1 < s < 2$ のとき n^{s-1} のオーダー、$s > 2$ のとき n^2 のオーダーとなり、$s = 2$ の前後で不連続に変化することが [1] で示されている。（[2] で証明の一部が修正されている。）一方、Sierpinski gasket 格子上の長距離浸透モデルの場合には、$s > 2d$ のときの $\tau(G'_n)$ の評価はまだ得られていない。また、

関連する研究として、[3] において、ランダムウォークの熱核評価を導出するための道具の 1 つとして、$[-n,n]^{\mathcal{D}}$（$\mathcal{D}$ は正の整数）上での長距離浸透モデルに対するランダムウォークの混合時間の上側からの評価について調べられている。Sierpinski gasket 格子以外の様々なフラクタル格子（特にハウスドルフ次元の値が 1 と 2 の間の場合）の上で長距離浸透モデルの問題を考えたときに、$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の場合に見られたような混合時間のオーダーの不連続な変化が生じる場合とそうでない場合の境目がどこにあるのかに関しては興味深い問題と考えられる。

定理 2.1 の証明の方針について簡単に述べる。（証明の詳細については [6] を参照。）基本的な流れは、$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の長距離浸透モデルの場合に対する [2] の手法を踏襲する。まず、key lemma となる次の 2 つの補題を見る。

補題 2.2 ([6])　$d < s < 2d$ のとき、正の定数 c_3 が存在して次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\max_{x\in V_n}\deg(x)\le c_3 n\right)=1.$$

補題 2.3 ([5])　$d < s < 2d$ のとき、定数 $\eta > 1$, $c_4, c_5 > 0$, $c_6 > 1$ が存在して、十分大きい n に対して次が成り立つ。

$$\mathbb{P}(D(n) > n^{\eta}) \le \frac{c_4(\log n)(3^n)^2}{\exp(c_5 n^{c_6})}.$$

ただし、$D(n) = \max_{x,y\in V_n} d(x,y)$ はランダムグラフ G'_n の直径を表す。（$d(x,y)$ は、G'_n 上における 2 点間の最短ステップ数。）

補題2.2は直接的な計算によって示される。補題2.3は、Sierpinski gasket 格子上の長距離浸透モデルに対して、パラメーター s の値をいろいろ動かしたときにランダムグラフの直径の大きさがどのように変化するかを調べた [5] において得られた評価の 1 つである。

定理 2.1 の証明の方針　$\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ の推移行列の第二固有値を λ_2 とおくと、[4] の命題 3 から次が成り立つ。

$$\tau(G'_n) \le \frac{\log(4|E'_n|)}{1-\lambda_2} \le \frac{c_7 n}{1-\lambda_2}.$$

ここで、$x, y \in V_n$ $(x \neq y)$ に対して、x を始点、y を終点とする G'_n 上の simple path 全体の集合を $\mathcal{P}(x,y)$ とする。また、G'_n 上の simple path 全体の集合を $\mathcal{P}$ とする。写像 $f : \mathcal{P} \to [0,1]$ が任意の x, y に対して $\sum_{p\in\mathcal{P}(x,y)} f(p) = \pi(x)\pi(y)$ をみたすときに、f を flow と呼ぶ。[7] の定理 5' から、任意の flow f に対して次が成り立つ。

$$\frac{1}{1-\lambda_2} \leq \rho(f) \equiv \max_{(a,b)\in E'_n} \frac{f((a,b))}{\pi(a)P(a,b)}.$$

ただし、$f((a,b)) = \sum_{p\in\mathcal{P},\, p\ni(a,b)} f(p)|p|$ である。$|p|$ は path の長さを表す。ある $c_8 > 0$ に対して、$\rho(f) \leq n^{c_8} 2^{(s-d)n}$ をみたす flow f を構成できる確率が $n \to \infty$ のとき 1 に近づくことを補題 2.2, 2.3 を用いて示し、上記の評価と併せて $\tau(G'_n)$ の上側からの評価が得られる。

$\tau(G'_n)$ の下側からの評価については、等周定数 ϕ^*（定義は 3 節を参照）に関して

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\phi^* \leq c_9 2^{(s-d)n}) = 1$$

が成り立つことを直接計算によって示し、等周定数と混合時間の間に成り立つ関係式 $\tau(G'_n) \geq 1/(4\phi^*)$ と併せることにより得られる。 □

3　ランダムグラフの等周定数

以下では 1, 2 節と同じ設定の下で、$\tau(G'_n)$ と深い関係を持つ量であるランダムグラフの等周定数について考える。$Q(x,y) = \pi(x)P(x,y)$ $(x, y \in V_n)$ とおき、$A, B \subset V_n$ に対して $\pi(A) = \sum_{x\in A}\pi(x)$, $Q(A,B) = \sum_{x\in A}\sum_{y\in B} Q(x,y)$ と書く。

$$\phi^* = \min_{\substack{D\subset V_n \\ 0<\pi(D)\leq\frac{1}{2}}} \frac{Q(D,D^c)}{\pi(D)}$$

を等周定数と呼ぶ。

命題 3.1　(1) $d < s < 2d$ のとき、正の定数 c_{10}, c_{11} が存在して次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(n^{-c_{10}} 2^{(d-s)n} \leq \phi^* \leq c_{11} 2^{(d-s)n}\right) = 1.$$

(2) $s \geq 2d$ のとき、正の定数 c_{12}, c_{13} が存在して次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(c_{12} n^{-1} 3^{-n} \leq \phi^* \leq c_{13} n 3^{-n}\right) = 1.$$

命題 3.1 (2) で特に $s > 2d$ のとき、ϕ^* の上側からの評価の部分は、$n3^{-n}$ を例えば $(\log n)3^{-n}$ などに置き換えても成り立つ。$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の長距離浸透モデルの場合には、等周定数 ϕ^* は $1 < s < 2$ のとき n^{1-s} のオーダー、$s \geq 2$ のとき n^{-1} のオーダーとなり、$s = 2$ の前後で不連続な変化は見られない。（$1 < s < 2$ のときの上側からの評価は [2] で示されており、それ以外の部分は命題 3.1 の証明と同様に考えればよい。）等周定数に関していえば、命題 3.1 から、$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上と Sierpinski gasket 格子上の長距離浸透モデルにある程度共通した性質が見られることが分かる。

命題 3.1 の証明　(1) 上側からの評価については、定理 2.1 の証明の中で既に見ている。下側からの評価については、定理 2.1 における $\tau(G'_n)$ の上側からの評価と、不等式 $\tau(G'_n) \geq 1/(4\phi^*)$ よりただちに従う。

(2) まず上側からの評価を示す。$A = V_{n-1}$ に対して、[6] と同様の計算により

$$\sum_{x \in A} \sum_{\substack{y \in A^c \\ |x-y| \geq 2}} \mathbb{P}(\mu_{xy} = 1) \leq c_{14} \sum_{l=1}^{n-1} 2^{(2d-s)l} + c_{15}$$

が成り立つ。（μ_{xy} は x, y が辺で結ばれているとき値 1 をとり、そうでないとき値 0 をとる確率変数。）$s > 2d$ のとき (右辺) $\leq c_{16}$、$s = 2d$ のとき (右辺) $\leq c_{17} n$ となる。従って

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{x \in A} \sum_{\substack{y \in A^c \\ |x-y| \geq 2}} \mu_{xy} > c_{18} n \right) &\leq e^{-c_{18} n} \exp\left\{ (e-1) \sum_{x \in A} \sum_{\substack{y \in A^c \\ |x-y| \geq 2}} \mathbb{P}(\mu_{xy} = 1) \right\} \\
&\leq \exp\{((e-1)c_{17} - c_{18})n\}
\end{aligned}$$

となり、c_{18} を十分大きく選んでおけば右辺は $n \to \infty$ のとき 0 に収束する。このことと

$$\frac{Q(A, A^c)}{\pi(A)} = \frac{\sum_{x \in A} \sum_{y \in A^c} \mu_{xy}}{2 \sum_{x \in A} \deg(x)} \leq \frac{\sum_{x \in A} \sum_{y \in A^c} \mu_{xy}}{c_{19} 3^n}$$

を併せると

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{Q(A, A^c)}{\pi(A)} \leq c_{20} n 3^{-n} \right) = 1$$

が成り立つ。$B = A + u_{n-1}$ に対しても同様のことが成り立ち、$\pi(A) \leq \frac{1}{2}$ または $\pi(B) \leq \frac{1}{2}$ となることより結論を得る。

次に下側からの評価を示す。

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\phi^* \geq c_{21} n^{-1} 3^{-n}\right) &= \mathbb{P}\left(\min_{\substack{D \subset V_n \\ 0<\pi(D)\leq\frac{1}{2}}} \frac{\sum_{x\in D}\sum_{y\in D^c}\mu_{xy}}{2\sum_{x\in D}\deg(x)} \geq c_{21} n^{-1} 3^{-n}\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\frac{1}{c_{22} 3^n \max_{x\in V_n}\deg(x)} \geq c_{21} n^{-1} 3^{-n}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、補題 2.2 は $d < s < 2d$ の範囲で見ているが $s \geq 2d$ のときにも同じ主張が成立することに注意すれば、$c_{21} > 0$ を十分小さく選んでおくことにより上式の右辺は $n \to \infty$ のとき 1 に収束する。 □

謝辞　本研究は JSPS 科研費 16K17615 の助成を受けたものです。

参考文献

[1] Benjamini, I., Berger, N., Yadin, A. Long-range percolation mixing time. *Combin. Probab. Comput.* **17**, 487–494 (2008)

[2] Benjamini, I., Berger, N., Yadin, A. Long-range percolation mixing time. arXiv:math/0703872v2. (2009)

[3] Crawford, N., Sly, A. Simple random walk on long range percolation clusters I: heat kernel bounds. *Probab. Theory Related Fields.* **154**, 753–786 (2012)

[4] Diaconis, P., Stroock, D. Geometric bounds for eigenvalues of Markov chains. *Ann. Appl. Probab.* **1**, 36–61 (1991)

[5] Misumi, J. The diameter of a long-range percolation cluster on pre-Sierpinski gasket. *J. Stat. Phys.* **158**, 1083–1089 (2015)

[6] Misumi, J. The mixing time of a random walk on a long-range percolation cluster in pre-Sierpinski gasket. *J. Stat. Phys.* **165**, 153-163 (2016)

[7] Sinclair, A. Improved bounds for mixing rates of Markov chains and multicommodity flow. *Combin. Probab. Comput.* **1**, 351–370 (1992)